Konformtransformationen und Spinoren

Von K. Damert *

(Z. Naturforschg. 19 a, 1435—1437 [1964]; eingegangen am 27. Juli 1964)

Es wird versucht, die Heisenbergsche Skalentransformation mit Hilfe der Darstellungstheorie der konformen Gruppe zu erhalten.

Die konformen Transformationen wurden u. a. von Gürsey [1] und Kastrup [2] auf völlig verschiedene Weise auf Spinoren übertragen. In beiden Fällen entspricht die Dilatation nicht der Heisenbergschen Skalentransformation. Das läßt sich aber erreichen, wenn man die konformen Transformationen von einem Standpunkt betrachtet, der hier dargelegt werden soll.

I. Tensortransformationen

Zur Diskussion stehen die folgendermaßen definierten konformen Transformationen

$$g_{i'k'}\,\mathrm{d}x^{i'}\,\mathrm{d}x^{k'} = \lambda^2\, g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \qquad g_{i'k'} = g_{ik}\,, \tag{1}$$
$$i, k = 1, 2, 3, 4, \qquad \lambda = \lambda(x_j)\,,\ \text{reell.}$$

Mit Hilfe der vektoriellen Transformationskoeffizienten

$$A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \qquad A_{i'}^{\ i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \tag{2}$$

erhält man

$$g_{i'k'}\,A_i^{i'}\,A_k^{k'}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = \lambda^2\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x^i$$

oder

$$g_{i'k'}\,A_i^{i'}\,A_k^{k'} = \lambda^2\, g_{ik} \tag{3}$$

und

$$g^{i'k'}\,A_{i'}^{\ i}\,A_{k'}^{\ k} = \lambda^{-2}\, g^{ik}\,.$$

Fock [3] zeigte, daß (3) gerade die konformen Transformationen, d. h. Translationen, Lorentz-Drehungen, Dilatationen und Möbius-Transformationen definiert. λ ist eine beliebige skalare Funktion.

In der Dissertation von Kastrup [2] wird eine darstellungstheoretische Analyse gegeben, die von den Transformationen der Koordinaten ausgeht. Physikalisch bedeutet das, daß sich Feldgrößen wie der „Ortsvektor“ des Minkowski-Raumes transformieren sollten. Das scheint uns nicht evident, und wir halten deshalb am Vektorcharakter der Feldgrößen fest, wobei wir auch die Dimensionszahl Vier nicht überschreiten wollen. Um eine Anwendung von (3) zu geben, beweisen wir die Konforminvarianz der Maxwell-Gleichungen, die aus dem Variationsproblem

$$\delta \int H_{ik}\,H^{ik}\,\mathrm{d}^4x = 0 \tag{4}$$

folgen. H_{ik} ist der Feldstärketensor. Die transformierte Gleichung lautet

$$\delta \int g^{i'k'}\,A_{i'}^{\ i}\,A_{k'}^{\ k}\,g^{n'l'}\,A_{n'}^{\ n}\,A_{l'}^{\ l}\,H_{in}\,H_{kl}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|\mathrm{d}^4x = 0\,. \tag{5}$$

Aus (3) folgt durch Determinantenbildung

$$\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| = \pm\lambda^4. \tag{6}$$

Damit gilt

$$\int H_{ik}\,H^{ik}\,\mathrm{d}^4x = \int H_{i'k'}\,H^{i'k'}\,\mathrm{d}^4x'. \tag{7}$$

Das ist aber gleichbedeutend mit der Konforminvarianz der Feldgleichungen im Vakuum. Daß diese Invarianz verlorengeht, wenn die Stromdichte nicht verschwindet, ist evident. Es ist notwendig, darauf hinzuweisen, daß man sich darauf festlegen muß, alle Feldgrößen durch kovariante Tensoren zu charakterisieren, da die daraus mit Hilfe der g^{ik} zu bildenden kontravarianten Größen keine Tensoren sind.

II. Spinortransformationen

Die Übertragung von (3) auf Spinoren beginnt man in der üblichen Weise, legt sich aber nicht auf unimodulare Transformationen fest. Wir setzen

$$\chi_{A\dot{B}} = \varrho^i_{\ A\dot{B}}\,a_i\,; \qquad A, B = 1, 2. \tag{8}$$

$\chi_{A\dot{B}}$ sei ein gemischter Spinor, $\varrho^i_{\ AB}$ die Pauli-Matrizen, a_i ein beliebiger Vektor. Die Spinortransformation lautet

$$\chi_{A'\dot{B}'} = \Lambda^A_{A'}\,\Lambda^{\dot{B}}_{\dot{B}'}\,\chi_{A\dot{B}} \tag{9}$$

* Anschrift: Merseburg, Schillerstr. 23.

[1] F. Gürsey, Nuovo Cim. 3, 988 [1956].

[2] H. A. Kastrup, Ann. Phys., Lpz. 9, 388 [1962].

[3] V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie-Verlag, Berlin 1960, Anhang A.

Transformieren wir andererseits den Vektor (die PAULI-Matrizen lassen wir wie den metrischen Tensor fest) und benutzen die Willkür von a_i, so erhalten wir

$$\Lambda^A_{A'}\Lambda^{\dot B}_{\dot B'}\varrho^i{}_{A\dot B}=\varrho^{i'}{}_{A'\dot B'}A^i_{i'}. \tag{10}$$

Mit

$$\varrho^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \varrho^2=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix},\quad \varrho^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \varrho^4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$g_{ik}=g^{ik}=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&-1\end{pmatrix}$$

bilden wir die Determinante

$$|\Lambda^A_{A'}|\cdot|\Lambda^{\dot B}_{\dot B'}|\,|\varrho^i|=\begin{vmatrix}A^i_{3'}+A^i_{4'} & A^i_{1'}+A^i_{2'}\\ A^i_{1'}-iA^i_{2'} & A^i_{4'}-A^i_{3'}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Da $|\varrho^i|=-g^{(ii)}$, schreibt man dafür

$$|\Lambda^A_{A'}|\cdot|\Lambda^{\dot B}_{\dot B'}|\,g^{ik}=g^{i'k'}A^i_{i'}A^k_{k'}. \tag{12}$$

Der Vergleich mit (3) liefert

$$|\Lambda^A_{A'}|\cdot|\Lambda^{\dot B}_{\dot B'}|=\lambda^{-2}. \tag{13}$$

Setzen wir, wie man das bei der LORENTZ-Transformation auch macht, den Phasenparameter Null, so lautet das endgültige Ergebnis

$$|\Lambda^A_{A'}|=\lambda^{-1}. \tag{14}$$

Man wird einwenden, daß die Transformation nur 7 freie Parameter hat, wir aber 11 unterzubringen haben, da die 4 Parameter der Translationen durch Differentiation schon herausgefallen sind. Der Widerspruch ist scheinbar, da die fraglichen Parameter, die die MÖBIUS-Transformation beschreiben, auf beide Seiten von (14) nichtlinear eingehen. Gleiches gilt schon für (3).

III. Darstellungstheoretische Analyse

Wir wollen alle endlichdimensionalen Darstellungen der durch (14) gegebenen Gruppe angeben. Man bemerkt die Zweideutigkeit, denn (14) gilt auch, wenn man alle Elemente der Matrix durch ihr negatives ersetzt. Explizit findet man die gesuchten Darstellungen bei BÖRNER[4]. Die Darstellungen seiner vollen linearen Gruppe $\mathfrak{G}_2$ kann man hier vollständig übernehmen, da sie für unsere Gruppe irreduzibel bleiben. Die irreduziblen Darstellungen sind:

1. Die ganzrationalen. Sie bestehen aus allen KRONECKER-Produkten mit ν Faktoren

$$[\Lambda]^\nu=\Lambda\times\Lambda\times\ldots\times\Lambda \qquad (\Lambda\equiv\Lambda^A_{A'}). \tag{15}$$

2. Die semirational ganzen.

$$C_j(\Lambda)\times C_k(\bar\Lambda) \qquad (\bar\Lambda\equiv\Lambda^{\dot A}_{\dot A'}). \tag{16}$$

Dabei ist $C_i(\Lambda)$ eine irreduzible ganzrationale Darstellung durch symmetrische Spinoren i-ter Stufe. Diese beiden Darstellungen sind von der LORENTZ-Gruppe her bekannt. Neu treten auf:

3. Die semirationalen Darstellungen (q ganz)

$$(\det\Lambda)^{-q}\,C_j(\Lambda)\times C_k(\bar\Lambda). \tag{17}$$

4. Die rationalen Darstellungen

$$(\det\Lambda)^{-q}\,C_j(\Lambda). \tag{18}$$

Dabei sind die Darstellungen 1 – 4 vollständig reduzibel. Diese Eigenschaft haben nicht:

5. Die unzerfällbaren stetigen Darstellungen

$$D(\Lambda)=e^{\alpha\xi}K_m(\xi)\times C_i(\Lambda)\times C_j'(\Lambda) \tag{19}$$

mit $\xi=\ln|\det\Lambda|$, α beliebig komplex, $m\geqq 0$. $K_m(s)$ hat die Form

$$K_m(s)=\begin{pmatrix}1&s&s^2/2&\cdot&\cdot&s^m/m!\\0&1&s&\cdot&\cdot&s^{m-1}/(m-1)!\\ \vdots&&&&&\vdots\\ &&&&1&s\\0&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\end{pmatrix}.$$

$C_i(\Lambda)$ und $C_j'(\Lambda)$ sind inäquivalente ganzrationale Darstellungen. Die physikalische Bedeutung der letzten Darstellungen ist unklar, während die Darstellungen 3 und 4 die Einführung relativer Spinoren bedeuten, was sich für die HEISENBERGsche Skalentransformation als wichtig erweisen wird.

IV. Bispinortransformationen

Die Übertragung der Konformtransformation in den Bispinorraum macht prinzipiell keine Schwierigkeiten, ist aber formal nicht sehr schön. Wir verwenden die Definition der Bispinoren nach RZEWUSKI[5], indem wir dessen allgemeine Transformationsmatrix angeben. Mit

$$\psi'=S\psi,\qquad \Lambda^A_{A'}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix} \tag{20}$$

gilt

$$S=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha+\bar\delta & \gamma-\bar\beta & \alpha-\bar\delta & \gamma+\bar\beta\\ \beta-\bar\gamma & \delta+\bar\alpha & \beta+\bar\gamma & \delta-\bar\alpha\\ \alpha-\bar\delta & \gamma+\bar\beta & \alpha+\bar\delta & \gamma-\bar\beta\\ \beta+\bar\gamma & \delta-\bar\alpha & \beta-\bar\gamma & \delta+\bar\alpha\end{pmatrix} \tag{21}.$$

[4] H. BÖRNER, Darstellungen von Gruppen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[5] I. RZEWUSKI, Field Theory, Warschau 1958, Teil 1.

Wir lassen die γ_μ fest und definieren den adjungierten Bispinor durch

$$\overline{\psi} = \psi^+ \gamma_4 , \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} . \tag{22}$$

Aus (20) folgt durch hermitesche Konjugation und Multiplikation mit γ_4

$$\overline{\psi}' = \overline{\psi} \gamma_4 S^+ \gamma_4 = \overline{\psi} B ,$$

$$B = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} + \delta & \overline{\beta} - \gamma & \delta - \overline{\alpha} & -\gamma - \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} - \beta & \overline{\delta} + \alpha & -\beta - \overline{\gamma} & \alpha - \overline{\delta} \\ \delta - \overline{\alpha} & -\overline{\beta} + \gamma & \delta + \overline{\alpha} & \overline{\beta} - \gamma \\ -\overline{\gamma} - \beta & \alpha - \overline{\delta} & \overline{\gamma} - \beta & \alpha + \overline{\delta} \end{pmatrix} . \tag{23}$$

In Wirklichkeit benötigt man weder (21) noch (23), da für Invarianzuntersuchungen, die sich auf die LAGRANGE-Funktion beziehen, nur das Produkt $B \cdot S$ benötigt wird

$$\overline{\psi}' \psi' = \overline{\psi} B \cdot S \psi . \tag{24}$$

Durch Matrizenmultiplikation zeigt man

$$B \cdot S = |\Lambda^A_{A'}| \, E_4 . \tag{25}$$

E_4 ist die vierdimensionale Einheitsmatrix. (25) bedeutet, daß das Produkt $\overline{\psi} \psi$ nur bei LORENTZ-Transformationen invariant bleibt, sich aber bei Dilatationen und MÖBIUS-Transformationen (wir haben nicht $\lambda = \text{const}$ benutzt) ändert. In physikalisch bedeutsamen Fällen muß man sich auf Dilatationen beschränken. Für sie erhält man zwangsläufig, da für $\lambda = 1$ die vierdimensionale Einheitsmatrix herauskommen muß,

$$S_{\mathrm{D}} = \lambda^{-1/2} E_4 . \tag{26}$$

Um ein Beispiel für die rationalen Darstellungen anzugeben, fassen wir das ψ in der HEISENBERGschen nichtlinearen Spinorgleichung [6] als relativen Bispinor vom Gewicht -1 auf. ψ bildet dann eine rationale Darstellung der konformen Transformationen und ist offenbar einer der einfachsten relativen Bispinoren, die man bilden kann.

Für eigentliche LORENTZ-Transformationen gibt sich nichts Neues. Wohl aber bei Dilatationen. Aus

$$x^{i'} = \lambda x^i$$

folgt

$$\psi \to S_{\mathrm{D}} \, | S_{\mathrm{D}} |^{-1} \psi = \lambda^{-1/2} (\lambda^{-2})^{-1} \psi = \lambda^{3/2} \psi . \tag{27}$$

Das ist aber genau die HEISENBERGsche Skalentransformation. Die Spiegelungen muß man sich jetzt genau überlegen, da immer die Transformationsdeterminante eingeht.

Zum Schluß sei bemerkt, daß die Transformation (26) von STEUDEL [7] für die HEISENBERG-Gleichung untersucht worden ist, ohne sie allerdings abzuleiten.

Herrn Prof. Dr. SCHMUTZER verdanke ich das Thema der vorliegenden Arbeit. Für kritische Diskussionen bin ich ihm zu Dank verpflichtet.

[6] H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].

[7] H. STEUDEL, Z. Naturforschg. **17 a**, 133 [1962].